

- Formalismo da matriz densidade [Páginio 2.4]

1-

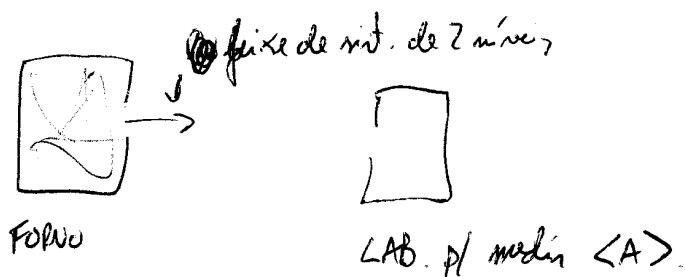
- Serve p/ generalizar o postulado da descrição de est. quânticos.
- Útil p/ descrever processos probabilísticos de produção de estados (+ realista) e p/ a descrição de partes de int. quânticos (emaranhamento, etc.)
- Vamos usar muito o Traco de uma matriz. Podemos reescrever as fórmulas p/ os prob. de medida
 o o valor esperado de um observável.

- $p(a_i) = \langle \Psi | \hat{P}_i | \Psi \rangle$ onde $\hat{P}_i = |a_i\rangle\langle a_i|$ (com adaptação p/ o caso degenerado)
 $|\Psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\Psi\rangle \Leftrightarrow \langle\Psi| = \sum_i \langle a_i| \langle\Psi|a_i\rangle$

$$\begin{aligned}
 p_{(a_i)} &= \langle \Psi | \hat{P}_i | \Psi \rangle = \sum_i \langle a_i | \underbrace{\langle \Psi | a_i \rangle}_{\uparrow} \hat{P}_i | \Psi \rangle = \sum_i \langle a_i | \hat{P}_i | \Psi \rangle \langle \Psi | a_i \rangle \\
 &= \text{Tr}(\hat{P}_i |\Psi\rangle\langle\Psi|) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} p(a_i) &= \langle \Psi | \hat{P}_i | \Psi \rangle \\ &= \text{Tr}(\hat{P}_i |\Psi\rangle\langle\Psi|) \end{aligned} \right. \\
 \text{• Da mesma forma } &\boxed{\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \text{Tr}(\hat{A} |\Psi\rangle\langle\Psi|)}
 \end{aligned}$$

- Até agora, nada de novo, só uma forma de reescrever em duas fórmulas usando o traço.

- Vamos agora imaginar uma situação p/ motivar a introdução da matriz-densidade.



Nessa terminologia
p/ o que chamávamos
simplesmente de
"estado".

- O fonte não está sempre o mesmo estado puro $|\psi\rangle$. Ao invés, ele emite um conj. de est. puros $|\psi_i\rangle$, cada um com probabilidade

$$p_i:$$

ESTADO
prep. pelo
fonte

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle \text{ com prob. } p_1 \\ |\psi_2\rangle \text{ com prob. } p_2 \\ \vdots \end{cases}$$

- No Laboratório, um experimental mede $\langle A \rangle$. O que ele obtém?

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \text{Tr}[A |\psi_i\rangle \langle \psi_i|]$$

- Isso está correto mas não nos ajuda a calcular $\langle B \rangle$, por exemplo. Vamos reescrevê-la p/ separar mais claramente as características do observável daquelas do fonte = ensemble estatístico de partículas.

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \text{Tr}[A |\psi_i\rangle \langle \psi_i|] = \text{Tr}[A \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|] = \text{Tr}[A \rho]$$

Onde definimos o operador densidade $\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[A \rho]$$

$\uparrow$ Designação do observável $\uparrow$ Designação completa do ensemble de estados puros preparados pelo fonte.

- Se quisermos $\langle B \rangle$, basta usar o mesmo ρ acima: $\langle B \rangle = \text{Tr}(\rho B)$.

- ρ é operador que representa uma mistura estatística de estados puros, e por isso dizemos que ρ representa estados mistos (em geral).
- Repare que a mistura estatística de estados é diferente da superposição de estados:

$$- \text{Se } |\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\Psi_i\rangle \quad \leftarrow \text{superposição}$$

$$\Rightarrow \rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j^* |\Psi_i\rangle\langle\Psi_j|$$

- Vamos agora considerar uma mistura dos estados $|\Psi_i\rangle$ com pesos estatísticos $p_i = |\alpha_i|^2$:

$$\rho' = \sum_i \underbrace{|\alpha_i|^2}_{\text{é diagonal}} |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \neq \rho_\Psi \quad \text{NE é diagonal.}$$

- Como $\rho' \neq \rho_\Psi$, os valores esperados de observáveis, em geral serão diferentes — os estados mistos diferentes, afinal.

PROPRIEDADES da matriz-densidade

- Qualquer matriz-densidade $\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ satisfaz:

1. ρ é Hermitiana.

2. ρ é operador positivo, semi-definido: $\forall |\Psi\rangle, \langle\Psi|\rho|\Psi\rangle \geq 0$.

3. $\text{Tr}(\rho) = 1$.

PROVA: $\Rightarrow$

PROVA:

$$1. \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \Rightarrow \rho^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho$$

$$2. \langle\phi|\rho|\phi\rangle = \langle\phi|\underbrace{\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}_\rho|\phi\rangle = \sum_i p_i \langle\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle \\ = \sum_i p_i |\langle\phi|\psi_i\rangle|^2 \geq 0.$$

$$3. \text{tr}(\rho) = \text{tr}\left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right] = \sum_i p_i \text{tr}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$$

mas ~~$\text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$~~ $\text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i \langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|a_i\rangle = \sum_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = 1$

$$\Rightarrow \text{tr}(\rho) = \sum_i p_i = 1. \text{ (consequência da normalização das probabilidades)}$$

• Estados puros: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ para algum $|\psi\rangle$, i.e. corresponde a vetor no espaço de Hilbert.

~~Prova: mostrar que $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho$ é puro.~~

~~Prova: ρ puro $\Rightarrow \rho = |\phi\rangle\langle\phi| \Rightarrow \rho$ é projetor $\Rightarrow \rho^2 = \rho$ (propriedade de projetor).~~

~~$\Rightarrow \rho^2 = \rho, \rho$ é Hermitiano $\Rightarrow \rho$ é projetor~~

~~$\Rightarrow \rho = \sum_{k=1}^n |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$. Mas $\text{tr}(\rho) = 1 \Rightarrow \text{tr}(\rho) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_j|\phi_k\rangle\langle\phi_k|a_j\rangle$~~

~~$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |\langle a_j|\phi_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^n 1 = n$~~

~~$1 \Rightarrow n=1$~~

~~$\Rightarrow \rho = |\phi\rangle\langle\phi|$~~

~~$\Rightarrow \rho$ é puro.~~

~~propriedades~~ propriedades do espectro de ρ : [Bali, 2.3]

① $\rho = \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ $\leftarrow$ representação espectral. (pois p_n e p_n^* hermitianos)

② $\text{tr}(\rho) = 1 \Rightarrow \sum_n p_n = 1$

③ Como $\rho = \rho^\dagger \Rightarrow p_n$ ~~é~~ são reais

④ ~~Como~~ $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle\psi|\sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| |\psi\rangle \geq 0$
isto $|\psi\rangle = |\phi_n\rangle$

$\Rightarrow p_j \geq 0$ Logo $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0 \Rightarrow p_j \geq 0$

Na verdade, as 2 condições são equivalentes. Assume que $p_j \geq 0 \forall j$.

$|\psi\rangle$ é estado arbitrário. então $\Rightarrow \langle\psi|\sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| |\psi\rangle$

$= \sum_n |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2 p_n$. (Se $p_n \geq 0 \forall n \Rightarrow \langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0$ também.)

- Dada uma matriz ρ , o jeito + fácil de verificar se $\rho \geq 0$ é diagonalizando e verificando se $p_n \geq 0 \forall n$.

⑤ Como $\sum_n p_n = 1$ e $p_n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq p_n \leq 1$

• O conj. de op. densidade ~~é~~ convexo. Isso significa que se ρ e σ são op. densidade, ~~então~~ $\rho' = p_1 \rho + p_2 \sigma$ também é $\left(\begin{matrix} p_1, p_2 \geq 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{matrix} \right)$.
 = combinação convexa de ρ e σ .

Estados puros x estados mistos

• Estado puro corresponde a vetor no esp. de $\mathcal{H}$. O op. densidade correspondente $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Est. puros não são misturas estatísticas.

• Outra condição necessária e suficiente: ρ  puro $\Leftrightarrow \rho^2 = \rho$

- Se ρ  puro, $\rho = \underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_{\text{Projeter}} \Rightarrow \rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)^2 = |\psi\rangle\langle\psi|$ (propriedade de projetores) $= \rho$.

- Se $\rho^2 = \rho$, considere a representação espectral de ρ e ρ^2 . $\rho = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$
 $\rho^2 = \sum_n \rho_n^2 |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$
 $\Rightarrow \rho_n^2 = \rho_n \Rightarrow \rho_n = 0 \text{ ou } 1$.

Como $\sum_n \rho_n = 1$, $\rho_j = 1$ e os outros $\rho_{i \neq j} = 0$. $\Rightarrow \rho = |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \Rightarrow \rho$  puro.

• Mais uma cond. necessária e suficiente: ρ  puro $\Leftrightarrow \text{Tr}(\rho^2) = 1$.

$\Rightarrow$ - ρ  puro $\Rightarrow \rho^2 = \rho \Rightarrow \text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$.

$\Leftarrow$ ~~Se $\text{Tr}(\rho^2) = 1$, então ρ  puro.~~ $\text{Tr}(\rho^2) = \sum_n \rho_n^2 \leq \sum_n \rho_n = 1 \Rightarrow \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$.

A igualdade são vale se $\rho_n^2 = \rho_n \forall n \Rightarrow \rho_n = 0 \text{ ou } 1$. Como vimos, $\rho_j = 1$ e $\rho_{i \neq j} = 0$.

• Uma distinção fundamental entre ρ puros e mistos. $\Rightarrow \rho = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ puro.

Teorema: ρ puro não pode ser escrito como conv. convexa não-trivial de outros estados, mas qualquer estado ρ misto pode.

~~Este teorema~~

[ver Bill. 2.3]

~~Os estados puros são os pontos extremos do conjunto dos estados densidade.~~

Geometricamente:

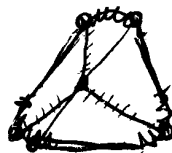


CORPO CONVEXO

$m = \text{ESTADOS PUROS}$

$\triangle$ e estados no interior = estados mistos.

- Em geral, elementos de um conjunto convexo podem ser escritos como comb. convexas dos est. extremos (= puros, no novo caso) de várias formas diferentes. Ex:



- Isso acontece com estados mistos. Veja:

$$\rho_a = a |\phi_1 \times \phi_1| + (1-a) |\phi_2 \times \phi_2|, \quad \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = 0.$$

- Defina novos vetores

$$|x\rangle = \sqrt{a} |\phi_1\rangle + \sqrt{1-a} |\phi_2\rangle$$

$$|y\rangle = \sqrt{a} |\phi_1\rangle - \sqrt{1-a} |\phi_2\rangle$$

Em termos destes:

$$\rho_a = \frac{1}{2} |x \times x\rangle + \frac{1}{2} |y \times y\rangle$$

$\Rightarrow$ Em geral existem infinitas combinações convexas diferentes resultando no mesmo operador densidade misto.

Exemplos: ($SPIN \frac{1}{2}$)

① Eixo polarizado, estado $S_z \uparrow : |+\rangle_z$.

$$\rho = |+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{puro})$$

② Eixo $S_x \uparrow : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z)$

$$\rho = |+\rangle_x\langle+|_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{puro})$$

③ Eixo não polarizado - est. térmico com $T \rightarrow \infty$.

$$\rho = \frac{1}{2} |+\rangle\langle+| + \frac{1}{2} |-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2} |+\rangle_x\langle+|_x + \frac{1}{2} |-\rangle_x\langle-|_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exemplos de ~~autovalores~~
multiplicidade de
decomposição de est. mistos.

Sistemas compostos

- Vimos que estados mistos aparecem de forma natural em situações onde podemos informar sobre o processo de preparação de estados
 $\Rightarrow$ estados mistos são misturas estatísticas de estados puros.
- Vamos agora estudar uma outra situação em que estados mistos aparecem de forma natural - na descrição de uma parte de um sist. quântico composto.
 $\Rightarrow$ Mesmo quando o sist. completo está em est. puro, o est. de cada parte pode ser misto.

Sistema com 2 partículas

- Part. A descrita por vetor $|\Phi_A\rangle$ em $\mathcal{H}_A$; base $\{|\phi_i\rangle_A\}$, $\dim(\mathcal{H}_A) = N$
 B $|\Psi_B\rangle$ $\mathcal{H}_B$; base $\{|\psi_j\rangle_B\}$, $\dim(\mathcal{H}_B) = M$
- Suponha agora que $\begin{cases} |\Phi_A\rangle = |\phi_i\rangle_A \\ |\Psi_B\rangle = |\psi_j\rangle_B \end{cases} \Rightarrow$ O est. conjunto é dado pelo produto tensorial
 $\Rightarrow |\Psi_{TOT}\rangle = |\phi_i\rangle_A \otimes |\psi_j\rangle_B$
 é vetor em $\mathcal{H}$ de dimensão $N \cdot M$, com base $\{|\phi_i\rangle_A \otimes |\psi_j\rangle_B\}$
- Se $|\Phi\rangle_A = a_1|\phi_1\rangle_A + a_2|\phi_2\rangle_A$; $|\Psi\rangle_B = |\psi_1\rangle_B$
 $\Rightarrow |\Psi_{TOT}\rangle = (a_1|\phi_1\rangle_A + a_2|\phi_2\rangle_A) \otimes |\psi_1\rangle_B = a_1|\phi_1\rangle_A \otimes |\psi_1\rangle_B + a_2|\phi_2\rangle_A \otimes |\psi_1\rangle_B$
- Em geral: $\left(\sum_i a_i |\phi_i\rangle_A\right) \otimes \left(\sum_j b_j |\psi_j\rangle_B\right) = \sum_{i,j} a_i b_j |\phi_i\rangle_A \otimes |\psi_j\rangle_B$
 que é o est. puro mais geral do sist. composto.

- Queremos que H_{AB} "herde" as propriedades do produto escalar definido para os subespaços H_A e H_B . Isso acontece se definirmos:

$$(\langle \psi_1 |_A \otimes \langle \psi_2 |_B) \cdot (|\phi_1 \rangle_A \otimes |\phi_2 \rangle_B) = \langle \psi_1 | \phi_1 \rangle_A \langle \psi_2 | \phi_2 \rangle_B$$

- Ação de operadores:

$$A \otimes B (|\phi \rangle_A \otimes |\psi \rangle_B) = A|\phi \rangle_A \otimes B|\psi \rangle_B$$

- Para qd as propriedades acima sejam válidas em qualquer representação, precisamos ~~aprender~~ saber como escrever o produto tensorial como vetores - coluna:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \\ \vdots \\ a_N \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_N b_M \end{pmatrix}$$

$|\phi \rangle_A \otimes |\psi \rangle_B$

- Representação p/ $A \otimes B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{M1} & \dots & b_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1N}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1}B & \dots & a_{NN}B \end{pmatrix}$$

$A \qquad B$

$$A \otimes B$$

Exemplo simples: A e B são mat. de 2 linhas.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$A \quad \otimes \quad B$

Estados emaranhados

- Construímos uma base p/ $\mathcal{H}_A$ a partir de 2 esq: $\{ | \Phi_i \rangle_A \}$ p/ $\mathcal{H}_A$
 $\{ | \Psi_i \rangle_B \}$ p/ $\mathcal{H}_B$

• Cada vetor-estado é da forma $| \Phi \rangle_A \otimes | \Psi \rangle_B$. Mas como podemos fazer ~~operadores~~ superposições arbitrárias, nem todo est. quântico em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tem essa forma. [estados produto]

EXEMPLO: $| \Psi \rangle_{\text{TOT}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (| + \rangle_A \otimes | + \rangle_B + | - \rangle_A \otimes | - \rangle_B)$ $\oplus$

onde $\begin{cases} S_z | + \rangle = +\frac{\hbar}{2} | + \rangle \\ S_z | - \rangle = -\frac{\hbar}{2} | - \rangle \end{cases}$

• Será que $| \Psi \rangle_{\text{TOT}}$ pode ser escrito como $| \Phi \rangle_A \otimes | \Psi \rangle_B$?

$$| \Phi \rangle_A \otimes | \Psi \rangle_B = (\alpha | + \rangle_A + \beta | - \rangle_A) \otimes (\gamma | + \rangle_B + \delta | - \rangle_B)$$

$$= \alpha \gamma | ++ \rangle_{AB} + \alpha \delta | +- \rangle_{AB} + \beta \gamma | -+ \rangle_{AB} + \beta \delta | -- \rangle_{AB}$$

compara com $\oplus$: $\alpha \delta = \beta \gamma = 0 \Rightarrow$ ~~casos~~ NÃO podemos escolher

$\alpha = 0$ não
 $\beta = 0$ não
 $\gamma = 0$ ou $\delta = 0$

$\Rightarrow | \Psi \rangle_{\text{TOT}}$ acima não pode ser escrito como estado produto.

- Estados que não podem ser escritos como est. produto são chamados de Estados emaranhados

$\Rightarrow$ úteis em: ~~computação quântica~~
 criptografia quântica
 teletransporte q.-i
 etc.

Algumas propriedades de estados emaranhados:

① Est. global é bem definido (puro), mas est. de subitêms ^[vamos logo mais] não é (misto).

Claramente isso é impossível: [a entropia total é a soma das entropias das partes] $\leftarrow$ mas é falso p/ est. emaranhados.

② Medidas em est. emaranhados revelam a não-localidade quântica (violação de desigualdades de Bell).

③ Emaranhamento é um recurso usado em diversas aplicações de informação quântica, como criptografia, computação quântica e ~~protocolos~~ protocolos como teletransporte quântico.

①

Desigualdade de Bell

- Em 1964, John Bell propôs uma desigualdade ~~que~~ que revela uma característica surpreendente da Mecânica Quântica, a não-localidade.
- Vamos ver aqui uma desigualdade semelhante, proposta por Clauser-Horne, Shimony e Holt (CHSH) posteriormente.

Desigualdade CHSH

(se podem assumir estes valores)

- Considere 4 variáveis $a_1, b_1, a_2, b_2 = \pm 1$. Então é fácil mostrar que

$$-2 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_2 \leq 2$$

- Imagine que vamos medir um grande número dessas variáveis. Se $\langle a_i b_j \rangle$ é o valor médio de $a_i b_j$, a desig. acima é equivalente a:

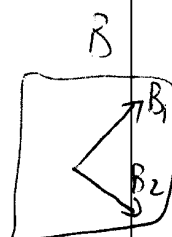
$$|\langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_2 b_2 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_1 b_2 \rangle| \leq 2$$

← Desigualdade

CHSH

- Essa desigualdade é um resultado restritivo ~~sobre~~ ^{sobre} médias de produtos de variáveis que assumem valores ± 1 .
- Vamos ver agora o que este resultado nos diz sobre combinações entre medições de propriedades de sistemas quânticos.

- Suponha a seguinte situação: vamos fazer medidas com resultados ± 1 em 2 sistemas distantes. ⁽²⁾



- A mede A_1 ou A_2 ; B mede B_1 ou B_2 .
- Novas hipóteses: ⁽¹⁾ Os valores recebidos estavam pré-definidos ("realismo").

⁽²⁾ A medida feita por A não muda o resultado de B
(e vice-versa). ("LOCALIDADE")

- Se as hipóteses ⁽¹⁾ e ⁽²⁾ valem, então os resultados de medidas (a_1, a_2, b_1, b_2) necessariamente satisfazem a desigualdade CHSH definida na última página. Para isso, vamos precisar realizar as medidas em um grande número de sistemas preparados identicamente, para podermos calcular os ~~valores~~ valores médios de cada par $\langle a_i b_j \rangle$.
- Veremos agora que medidas em um par emaranhado de spins $\frac{1}{2}$ violam a desigualdade CHSH.

(4)

- É fácil violar a desigualdade CHSH se A e B são 2 pessoas que se comunicam. Nesse caso, o int. A e B viola a hipótese de localidade.
- O surpreendente é que int. quânticos emaranhados violam CHSH mesmo em medidas feitas simultaneamente com grandes separações, ou seja, numa situação em que é impossível a comunicação entre eles. Isso foi comprovado experimentalmente ~~em~~ em vários experimentos (por exemplo o de Aspect e colaboradores em 1982).
- A não-localidade quântica ~~define~~ distingue a MQ de teorias clássicas que a precederam.
- Essa não-localidade é usada em protocolos de informação quântica, como o teletransporte quântico e a criptografia quântica.

Descendentes subistemas

- ~~Alice e Bob~~ Alice e Bob compartilham estado ρ_{AB} .

Base p/ subistema de A: $\{|\phi_i\rangle_A\}_{i=1,\dots,N}$

" B: $\{|\psi_i\rangle_B\}_{i=1,\dots,M}$.

- Bob não dá acesso à part. B p/ Alice. Alice quer medir $\langle A \rangle$, onde

$A = \hat{A} \otimes \mathbb{1}$ é ~~operador~~ observável do int. de Alice. traço sobre os 2 sistemas

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i,j} \langle \phi_i |_A \langle \psi_j |_B \hat{A} \otimes \mathbb{1} |\phi_j\rangle_A |\psi_j\rangle_B = \text{Tr}_{AB} [\hat{A} \otimes \mathbb{1} \rho_{AB}]$$

$$\Rightarrow \langle A \rangle = \text{Tr}_{AB} [\hat{A} \otimes \mathbb{1} \rho_{AB}]$$

- - Fórmula correta, mas deve ser possível ~~reduzi-la~~ re-escrevê-la sem ref. do int. de Bob.

- Queremos definir ρ_A p/ int. de A tal que $\langle A \rangle = \text{Tr}_{AB} [A \otimes \mathbb{1} \rho_{AB}] = \text{Tr}_A [A \rho_A]$

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \phi_i |_A \langle \psi_j |_B A \otimes \mathbb{1} |\phi_j\rangle_A |\psi_j\rangle_B = \text{Tr}_A [A \rho_A]$$

$$\text{com } \rho_A = \sum_{j=1}^M \langle \psi_j |_B \rho_{AB} |\psi_j\rangle_B = \text{Tr}_B (\rho_{AB})$$

$\hat{L}$ traço parcial sobre B - é necessário
e só sobre base de B.

$$\Rightarrow \langle A \rangle = \text{Tr}_A [A \rho_A]$$

Como calcular o traço parcial?

Vamos começar com o caso de um estado produto: $\rho_{AB} = |\phi\rangle_A |\psi\rangle_B \langle\phi|_A \langle\psi|_B$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B(\rho_{AB}) &= \sum_{\lambda=1}^M \langle \psi_\lambda |_B \left(|\phi\rangle_A \langle\phi|_A \otimes |\psi\rangle_B \langle\psi|_B \right) | \psi_\lambda \rangle_B = \sum_{\lambda=1}^M |\phi\rangle_A \langle\phi|_A \langle \psi_\lambda | \psi \rangle_B \langle \psi | \psi_\lambda \rangle_B \\ &= |\phi\rangle_A \langle\phi|_A \end{aligned}$$

Para um ρ_{AB} geral, escrevemos ρ_{AB} na base de produtos e usamos a eq. acima.

$$\rho_{AB} = \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^M \alpha_{ij,kl} (|\phi_i\rangle_A \langle\phi_k|_A \otimes |\psi_j\rangle_B \langle\psi_l|_B)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B(\rho_{AB}) &= \sum_{c=1}^M \langle \psi_c |_B \left(\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^M \alpha_{ij,kl} |\phi_i\rangle_A \langle\phi_k|_A \otimes |\psi_j\rangle_B \langle\psi_l|_B \right) | \psi_c \rangle_B \\ &= \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^M \alpha_{ij,kl} |\phi_i\rangle_A \langle\phi_k|_A \underbrace{\langle \psi_c | \psi_j \rangle_B}_{\delta_{jc}} \underbrace{\langle \psi_l | \psi_c \rangle_B}_{\delta_{lc}} \\ &= \sum_{i,k=1}^N \left(\sum_{c=1}^M \alpha_{ic,kc} \right) |\phi_i\rangle_A \langle\phi_k|_A \end{aligned}$$

[elimina $\sum_{j,l}$]

$$\Rightarrow \rho_B = \sum_{i,k=1}^N \left(\sum_{c=1}^M \alpha_{ic,kc} \right) |\phi_i\rangle_A \langle\phi_k|_A$$

Exemplo: $\mathcal{H}_A$, base $\{|1\rangle_A, |2\rangle_A\}$
 $\mathcal{H}_B$, base $\{|1\rangle_B, |2\rangle_B\}$ } 2 int. de 2 níveis.

Base p/ $\mathcal{H}_{AB}$: $\{|11\rangle, |12\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}$ = int. de 4 níveis.

$$\begin{aligned} \text{considerar o estado: } \rho_{AB} &= \frac{1}{3} |11\rangle\langle 11| + \frac{1}{3} |11\rangle\langle 12| + \frac{1}{3} |11\rangle\langle 21| \\ &+ \frac{1}{3} |12\rangle\langle 11| + \frac{1}{3} |12\rangle\langle 21| + \frac{1}{3} |12\rangle\langle 22| \\ &+ \frac{1}{3} |21\rangle\langle 11| + \frac{1}{3} |21\rangle\langle 12| + \frac{1}{3} |21\rangle\langle 21| \end{aligned}$$

$\frac{1}{3} \cdot$

$\langle 11 $	1	1	1	
$\langle 12 $	1	1	1	
$\langle 21 $	1	1	1	
$\langle 22 $				

• Agora tiro o $\text{tr}_B(\rho_{AB}) =$ junto termos com estados da forma $|iXj\rangle$.

$$\Rightarrow \rho_A = \frac{1}{3} |1X1\rangle + \frac{1}{3} |1X1\rangle + \frac{1}{3} |2X2\rangle + \frac{1}{3} |2X1\rangle + \frac{1}{3} |2X2\rangle$$

$$= \frac{2}{3} |1X1\rangle + \frac{1}{3} |1X2\rangle + \frac{1}{3} |2X1\rangle + \frac{1}{3} |2X2\rangle$$

$$\frac{1}{3} \begin{array}{c|cc} & |1\rangle & |2\rangle \\ \hline |1\rangle & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline |2\rangle & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

$\text{tr}(\rho_A^2) < 1 \Rightarrow$ estado misto.

• Mas ρ_{AB} é puro: $\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$ com $|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|12\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|21\rangle$

$\Rightarrow$ Est. global puro, mas ρ_A misto.

• Pode-se mostrar que sempre que ρ_{AB} é puro mas ρ_A é misto, trata-se de estados emaranhados.